

Varianta 4

Subiectul I

- a) $AB = \sqrt{32}, AC = \sqrt{72}, BC = \sqrt{104} \Rightarrow \triangle ABC$ este dreptunghic.
- b) $S_{ABC} = 24$.
- c) $\alpha = 1$.
- d) $a = \frac{1}{8}$ și $b = \frac{1}{8}$.
- e) $S = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$.
- f) $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{5}$.

Subiectul II

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

- a) Numărul de submulțimi cu două elemente din mulțimea A este 21.
- b) Numărul de două cifre distincte cu elemente din mulțimea A este 42.
- c) $p = \frac{4}{7}$.
- d) 2^7 .
- e) $p = \frac{1}{7}$.

2.

a) $f'(x) = \frac{2008}{(x+1)^2}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

b) $f(-1-x) = \frac{x+2008}{x}, f(-1+x) = \frac{x-2008}{x}$. Deci

$f(1-x) + f(-1+x) = \frac{2x}{2} = 2, \forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$.

c) $f'(x) > 0, \forall x \in (-1, \infty)$, deci f este crescătoare pe $(-1, \infty)$.

d) $\int_0^1 f(x) dx = 1 - 2008 \ln 2$.

e) $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

Subiectul III

- a) $(x-7)(y-7) + 7 = xy - 7x - 7y + 49 + 7 = x * y, \forall x, y \in \mathbb{R}$.
- b) Se verifică prin calcul direct.

- c) $7^x * 49^x = 7 \Rightarrow (7^x - 7)(49^x - 7) + 7 = 7 \Rightarrow (7^x - 7)(7^{2x} - 7) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}$.
- d) $x \in (7, \infty), y \in (7, \infty) \Rightarrow (x-7)(y-7) > 0 \Rightarrow (x-7)(y-7) + 7 > 7 \Rightarrow x * y \in (7, \infty)$.
- e) $x * (x-1) * (x-2) < 7 \Rightarrow (x-7)(x-8)(x-9) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 7) \cup (8, 9)$.
- f) Notăm $P(n): x_1 * x_2 * \dots * x_n = (x_1 - 7)(x_2 - 7) \dots (x_n - 7) + 7, \forall n \in \mathbf{N}^*$,

$\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}$

Pentru $n=1$ este adevărat.

Presupunând că $P(k)$ este adevărată pentru $k \in \mathbf{N}^*$, arătăm că $P(k+1)$ este adevărată. Dar $(x_1 * \dots * x_k) * x_{k+1} = ((x_1 - 7)(x_2 - 7) \dots (x_k - 7) + 7) * x_{k+1} = ((x_1 - 7)(x_2 - 7) \dots (x_k - 7) - 7 + 7)(x_{k+1} - 7) + 7 = (x_1 - 7)(x_2 - 7) \dots (x_{k+1} - 7) + 7$.

Deci $P(k+1)$ este adevărată. Folosind metoda inducției matematice rezultă că

propoziția este adevărată, $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

g) Observăm că $x * 7 = 7 * x = 7$ atunci folosind asociativitatea vom obține

$$\underbrace{1 * \dots * 6}_x * 7 * \underbrace{8 * \dots * 2007}_y = (x * 7) * y = 7 * y = 7.$$

Subiectul IV

a) Se verifică prin calcul direct.

b) $f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(9) = 1 - \frac{1}{10^2 + 1} = \frac{100}{101}$.

c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, deci $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției.

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 f(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + x^3}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2)} = 2$.

e) $\int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{2} - \arctg 2$.

f) $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2} + \frac{2(x+1)}{((x+1)^2 + 1)^2}, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{2}$.

g) $\int_0^1 \left(f(x) + \frac{1}{(x+1)^2 + 1} \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{4}$.